CONCOURS DE RECRUTEMENT CF, CT et CTS

Epreuve optionnelle de Mathématique

Durée : 4 heures
Coef. : 2

- Les trois parties du problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Soit Π un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$; le couple des coordonnées d'un point dans ce repère sera noté (x, y).

On considère la parabole (P) d'équation cartésienne $y^2 = 2p\,x$, dans Π, p étant une "longueur" donnée (réel strictement positif).

- Question préliminaire

Soient y_1 et y_2 les ordonnées de deux points M_1 et M_2 de (P). Ecrire une équation de la droite passant par les deux points M_1 et M_2. Ecrire une équation de la tangente à (P) en un point M d'ordonnée λ, puis une équation de la normale à (P) en M, en fonction de λ.

- 1ère partie

A tout point M de (P) ayant pour ordonnée $\lambda \neq 0$, on associe le point N de (P) où la normale à (P) en M recoupe (P), ainsi que le point I, milieu du segment $[MN]$.

1°) Donner les coordonnées de I en fonction de λ. Construire la courbe (Γ) décrite par I quand λ décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. Quels sont les rayons de courbure de (Γ) aux points de (Γ) où la tangente est dirigée par $\vec{j}$.

2°) Montrer que du point I défini ci-dessus, λ étant fixé différent de 0, on peut mener deux autres droites également normales à (P) en deux autres points que M, appelés M_1 et M_2. Donner une équation de la droite D_λ passant par ces deux points M_1 et M_2, les coefficients dépendant de p et λ.

3°) On considère d'autre part, la courbe paramétrée (C) décrite par le point K de coordonnées $x = 3\,pt^2$, $y = -4\,pt^3$, quand t décrit $\mathbb{R}$.

Montrer que pour tout λ réel non nul, il existe une valeur de t unique telle que la droite D_λ définie au 2°) soit tangente à (C) au point K de paramètre t. Montrer que, réciproquement, la tangente à (C) en tout point K, qui n'est pas l'origine O du repère, est une droite D_λ bien déterminée.

On appellera dans la suite $\vec{T}$ le vecteur de norme 1 de cette tangente à (C) en K, (C) étant orientée dans "le sens des t croissants" (pour $t \neq 0$) et ϕ la mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{T})$ comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. Déterminer les composantes de $\vec{T}$ en fonction de t (on sera amené à considérer les deux cas : $t > 0$, et $t < 0$, séparément) et en déduire que ϕ appartient à $]-\pi, 0[$.

Déterminer en fonction de p et de ϕ_o (ϕ_o étant la valeur de ϕ pour $t = t_o \neq 0$) la mesure du rayon de courbure de (C) en un point quelconque K_o (de paramètre t_o) ainsi que la longueur de l'arc $\widehat{OK}_o$ de (C) qu'on pourra noter $|s_o|$ (s = abscisse curviligne).

4°) K étant défini par le paramètre t ou par le paramètre ϕ, $\phi \in]-\pi, 0[/ \{-\frac{\pi}{2}\}$, on porte sur la tangente en K à (C) le point S défini par $\overrightarrow{KS} = f(\phi)\vec{T}$. Peut-on déterminer une fonction f à dérivée continue sur $]-\pi, 0[/ \{-\frac{\pi}{2}\}$, telle que $f(o) = -\frac{p}{2}$ et que la tangente en S à la courbe décrite alors par ce point S soit orthogonale au vecteur $\vec{T}$ correspondant ? Que représente le point K associé à S pour la courbe (C') décrite par S ?

Nature et description précise de (C').

5°) Construire les trois courbes (P), (C) et (C') dans un même repère du plan (on prendra par exemple p = 4 cm).

.../...

- 2ème partie

1°) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur l'isobarycentre de trois points M_o , M_1 et M_2 de (P) pour que les normales en M_o , M_1 et M_2 à P soient concourantes.

2°) A un point M donné de (P), d'ordonnée $\lambda \neq 0$, on associe encore le point N où la normale en M recoupe (P) ; puis, pour k réel, différent de 1 et de -1, le point Q défini par $\overrightarrow{QM} = k\,\overrightarrow{QN}$. Puis, de Q, on mène les deux autres normales QM_1 et QM_2 à (P) quand elles existent. On appelle λ_1 et λ_2 les ordonnées de M_1 et M_2.

Montrer que l'on peut exprimer simplement $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1 \lambda_2$ en fonction de p, λ et k. En déduire l'équation de la droite $M_1 M_2$ correspondante. Si λ reste fixé et k varie, comment se déplace la droite $M_1 M_2$.

- 3ème partie (Cinématique).

L'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 est muni de repères orthonormés directs.

On considère un premier repère, supposé fixe : $(O ; \vec{I}, \vec{j}, \vec{k})$. Un deuxième repère $(S ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ varie en fonction du temps t. L'origine S du repère mobile décrit la courbe d'équation : $y^2 = p(x + \frac{p}{2})$ dans le plan $z = 0$; à tout instant t l'axe $(S, \vec{I})$ est tangent en S à la courbe précédente l'angle $(\vec{i}, \vec{I}) = \theta$ étant dans l'intervalle $]-\pi , 0[$; et $\forall t$ on a $\vec{K} = \vec{k}$. θ est supposé être une fonction de classe C^1 au moins de t , t décrit $\mathbb{R}$.

1°) On considère un point M lié au repère mobile $(S ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ on appellera (X, Y, Z) ses coordonnées dans ce repère. Donner, à l'instant t, où S a une ordonnée λ, et où l'angle $(\vec{i}, \vec{I})$ est égal à θ les formules qui permettent, en utilisant λ, θ, X, Y, Z, d'exprimer les coordonnées qu'a le point M dans le repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

2°) Donner la définition de l'axe instantané de rotation et de translation Δ, à l'instant t, dans le mouvement du solide lié au repère $(S ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ par rapport au repère fixe. Quelle particularité présente ici Δ à tout instant ?

Exprimer $\cotg\theta$ (puis $\sin\theta$ et $\cos\theta$) en fonction de λ et p .

En déduire la relation liant les dérivées par rapport à t des deux fonctions λ et θ de t dans le mouvement.

Enfin donner des équations, à l'instant t, de l'axe Δ, d'une part dans le repère mobile, d'autre part dans le repère fixe.

Indiquer de façon précise la surface décrite par Δ dans $\mathcal{E}$ rapporté au repère fixe.

3°) Peut-on trouver une relation entre λ(ordonnée de S) et t pour que le mouvement de S soit à accélération centrale de centre O (origine du repère fixe), les "conditions initiales" étant : à l'instant $t = 0$, le point S est en S_o sur l'axe $(O, \vec{i})$ avec un vecteur vitesse égal à $-p\,\vec{j}$?

- On sera amené à intégrer une équation différentielle du deuxième ordre en λ, fonction de la variable t, dans laquelle t n'intervient pas explicitement - on indiquera une méthode d'intégration d'une telle équation et on la résoudra -

Déduire du résultat précédent le temps mis par l'origine S du repère mobile pour parcourir l'arc $\overset{\frown}{S_o S_1}$ de la courbe qu'il décrit, le point S_1 étant le point d'ordonnée négative et d'abscisse nulle.